

Урок 7

Тема уроку: Побудова графіків функцій

Підручник з математики для 10-ого класу § 3 п.25

Повторення вивченого матеріалу

Цього разу перевірку домашнього завдання проведемо у вигляді інтерактивної гри. Пройшовши ці завдання, ви повторите всі основні поняття, які зустрічались в темі “Похідна” і знадобляться вам сьогодні на уроці: <https://learningapps.org/2737285> , <https://learningapps.org/20971313> .

Пояснення нового матеріалу

Графік функції дає найбільш наочне і водночас точне уявлення про ту чи іншу функцію. Відтворивши в пам’яті графіки елементарних функцій, можна швидко описати її властивості. В навколишньому світі багато процесів можна задати за допомогою формул (задати функцію) і, використовуючи похідну функції, побудувати її графік.

Раніше нам вже траплялися функції, вигляд графіків яких на той час ми не знали. У таких випадках ми будували їхні графіки по точках. Так було побудовано, наприклад, графіки функцій $y = x^2$; $y = \sqrt{x}$; $y = \frac{k}{x}$, де $k \neq 0$, тощо.

Але, застосовуючи такий спосіб побудови для складніших функцій, які нам не траплялися, можна пропустити важливі особливості графіка функції. Для того щоб уникнути подібних помилок, треба спочатку дослідити поведінку функції, виявити її особливості, а тільки потім будувати графік. До особливостей поведінки функції належать і її зростання, спадання та екстремуми. Тому для побудови графіка будемо використовувати похідну.

Досліджувати функцію $y = f(x)$ та будувати її графік можна за таким алгоритмом:



- 1) Знайти область визначення функції.
- 2) Дослідити функцію на парність, непарність та періодичність (для тригонометричних функцій).
- 3) Знайти точки перетину графіка функції з осями координат (якщо це можливо).
- 4) Знайти похідну функції та її критичні точки.
- 5) Знайти проміжки зростання, спадання та екстремуми функції.
- 6) Дослідити поведінку функції на кінцях проміжків області визначення, якщо це можливо.
- 7) За необхідності знайти ще кілька точок графіка та, використовуючи отримані результати, побудувати графік функції.

Розглянемо приклади дослідження функції та побудови її графіка за вказаним алгоритмом.

Задача 1. Дослідити функцію $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$ та побудувати її графік.

- Розв'язання. 1) $D(f) = R$.
- 2) $f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 - 3 = x^4 - 2x^2 - 3 = f(x)$; функція парна, тому її графік симетричний відносно осі ординат.
- 3) $f(0) = 0^4 - 2 \cdot 0^2 - 3 = -3$, тобто $(0; -3)$ – точка перетину з віссю y . Нехай $y = 0$, тоді маємо: $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$, звідки $x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$, отже, $(\sqrt{3}; 0)$, $(-\sqrt{3}; 0)$ – точки перетину з віссю Ox .
- 4) $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 4x(x - 1)(x + 1)$; тоді $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = -1$ – критичні точки.
- 5) Складемо таблицю, у якій зазначимо проміжки зростання, спадання, критичні точки функції та висновки щодо поведінки функції:

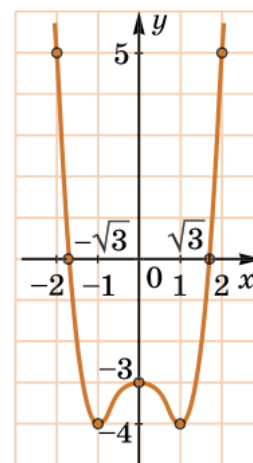
x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	\searrow	-4	\nearrow	-3	\searrow	-4	\nearrow
Висновок	спадає	min	зростає	max	спадає	min	зростає

6) Оскільки $D(f) = R$, то область визначення не має кінців.

7) Будуємо графік функції, використовуючи результати дослідження та значення функції ще у двох додаткових точках, наприклад, $f(-2) = f(2) = 5$.

Графік зображено на малюнку 23.1.

Метод побудови графіка з використанням похідної значно розширює коло задач, які доцільно розв'язувати графічно (з'ясування кількості коренів рівняння, пошук наближених значень коренів тощо).



Мал. 23.1

Далі виконайте самостійно завдання на дослідження функції та побудови її графіка за планом.

Задача 1. Дослідіть функцію $f(x) = 4x - \frac{x^3}{3}$ та побудуйте її графік.

Задача 2. Дослідіть функцію $f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6}$ та побудуйте її графік.

Перевірити себе можете, пройшовши за посиланнями: [Задача 1](#) та [Задача 2](#) .

Домашнє завдання: § 3 п.25, № 25.2.